Aproximación de variables aleatorias

Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad.

Definición 1. *Una variable aleatoria real es una función* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que* $[X \leq x] \in \Im$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}$*.*

Definición 2. *Diremos que una variable aleatoria real* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ *es simple si tiene la forma* $\varphi = \sum_{k=1}^{m} b_k I_{E_k}$*, donde* $b_1, \ldots, b_m$ *son números reales y* $E_1, \ldots, E_m$ *son elementos de* $\Im$*.*

El resultado siguiente es la base para para demostrar muchas de las propiedades de las variables aleatorias.

Teorema 1. *Sea* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *una variable aleatoria real no negativa, entonces existe una sucesión no decreciente de variables aleatorias simples no negativas* $\varphi_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *tales que* $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\omega) = X(\omega)$ *para cualquier* $\omega \in \Omega$*.*

Demostración

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos:

$$\varphi_n(\omega) = \begin{cases} \sum_{m=1}^{n2^n} \frac{m-1}{2^n} I_{\left\{y \in \nleq : \frac{m-1}{2^n} \leq X(y) < \frac{m}{2^n}\right\}}(\omega) & \text{si } X(\omega) < n \\ n & \text{si } X(\omega) \geq n \end{cases}$$

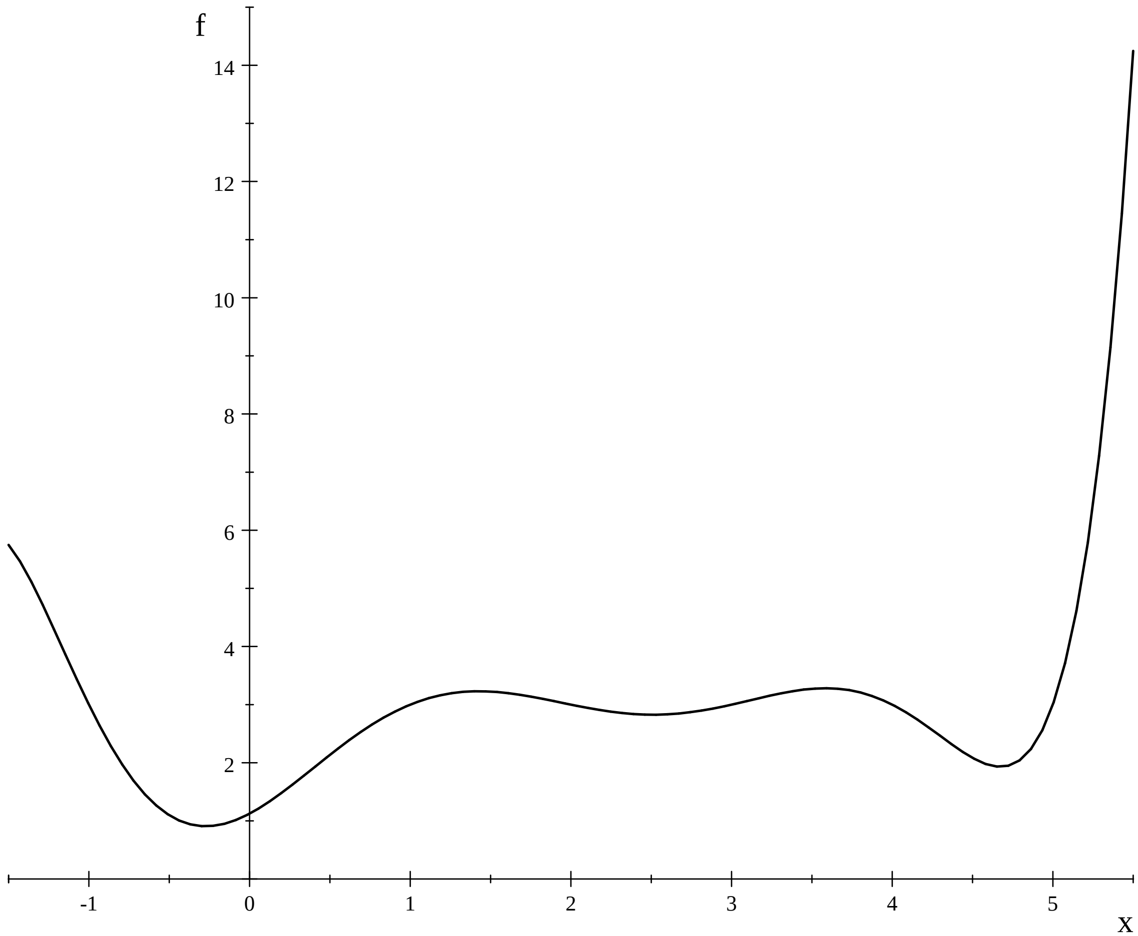
Obsérvese que aunque, para cada $\omega \in \Omega$ tal que $X(\omega) < n$, $\varphi_n(\omega)$ es una suma, únicamente uno de los términos es distinto de cero.

También podríamos escribir la definición de φ_n de la siguiente manera:

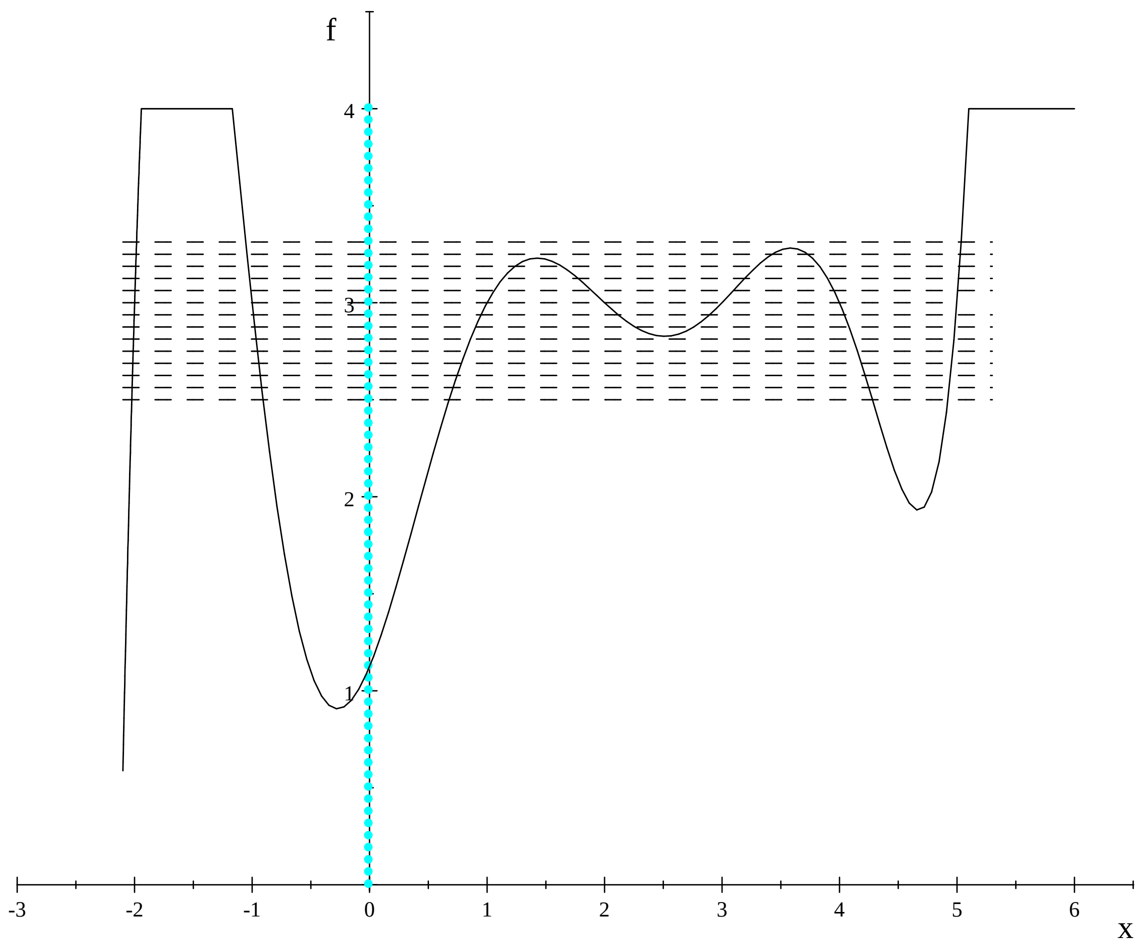
$$\varphi_n(\omega) = \begin{cases} \frac{m-1}{2^n} & \text{si } \frac{m-1}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{m}{2^n} \text{ y } m \in \{1, 2, \ldots, n2^n\} \\ n & \text{si } X(\omega) \geq n \end{cases}$$

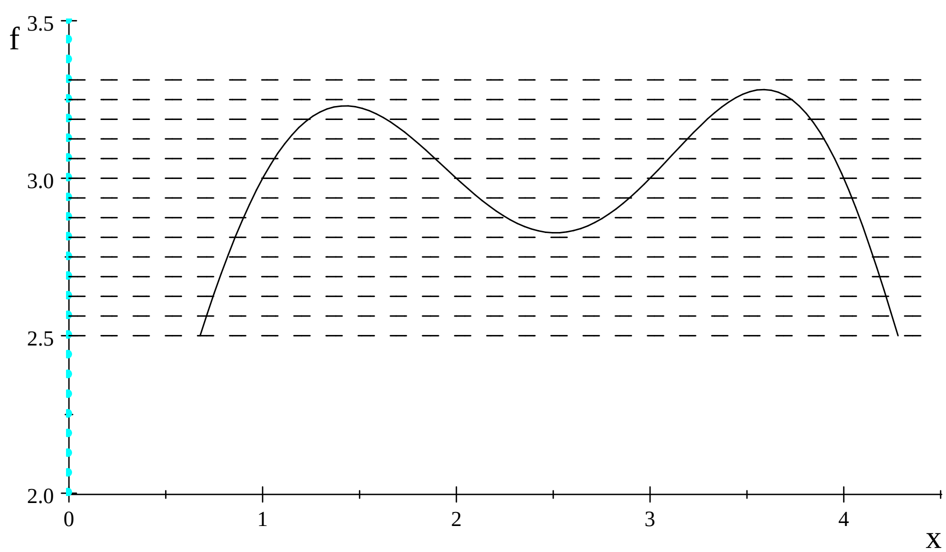
Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{1}{2^7}(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + 3$$



Si consideramos, a manera de ejemplo, $n = 4$,el intervalo $[0, 4)$, sobre el eje y, se parte en subintervalos de longitud $\frac{1}{2^4}$.


f
4
3
2
1
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
x


f
3.5
3.0
2.5
2.0
0
1
2
3
4
x

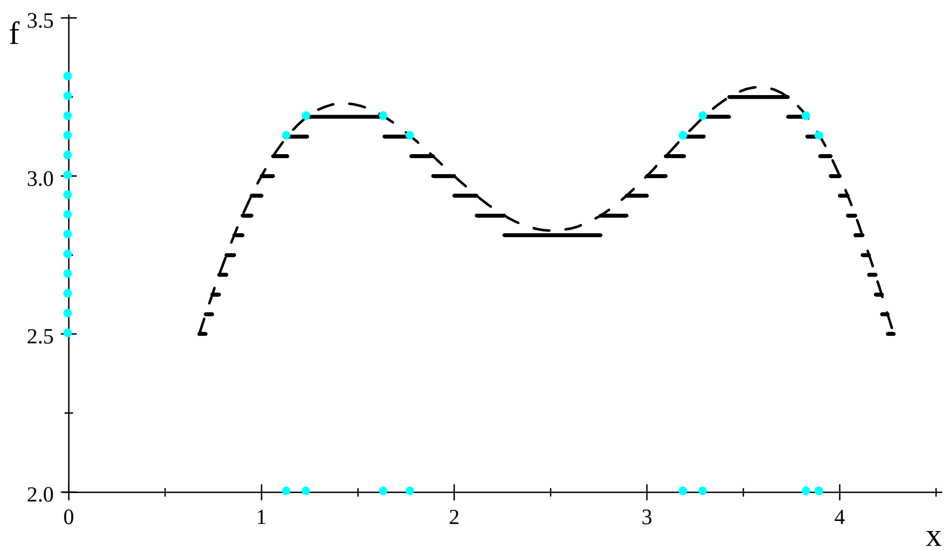
Entonces, por ejemplo:

$f^{-1}\left[\left[\frac{50}{2^4}, \frac{51}{2^4}\right)\right] = [1.134, 1.237) \cup [1.637, 1.776) \cup [3.193, 3.295\,) \cup [3.831, 3.898\,)$

Así que:

$\varphi_4(x) = \frac{50}{2^4}$ si $x \in [1.134, 1.237) \cup [1.637, 1.776) \cup [3.193, 3.295\,) \cup [3.831, 3.898\,)$

En la siguiente figura se muestran las gráficas de f y de φ_4 para valores de f en el intervalo $\left[\frac{40}{16}, \frac{53}{16}\right)$.



Pasemos ahora a la demostración del enunciado del teorema:

Si $X(\omega) = \infty$, entonces $\varphi_n(\omega) = n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que:

$\varphi_n(\omega) \leq \varphi_{n+1}(\omega)$ y $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\omega) = \infty = X(\omega)$.

Si $X(\omega) < n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, sea m el único número natural tal que $\frac{m-1}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{m}{2^n}$. Entonces, como $\varphi_n(\omega) = \frac{m-1}{2^n}$, se tiene:

$X(\omega) - \frac{1}{2^n} < \varphi_n(\omega) \leq X(\omega)$, así que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\omega) = X(\omega)$.

Ahora bien, como $\frac{2(m-1)}{2^{n+1}} \leq X(\omega) < \frac{2m}{2^{n+1}}$, se tiene que $\frac{2m-2}{2^{n+1}} \leq X(\omega) < \frac{2m-1}{2^{n+1}}$ o bien $\frac{2m-1}{2^{n+1}} \leq X(\omega) < \frac{2m}{2^{n+1}}$.

En el primer caso, se tiene:

$$\varphi_{n+1}(\omega) = \frac{2m-2}{2^{n+1}} = \frac{m-1}{2^n} = \varphi_n(\omega)$$

En el segundo, se tiene:

$$\varphi_{n+1}(\omega) = \frac{2m-1}{2^{n+1}} > \frac{2m-2}{2^{n+1}} = \varphi_n(\omega)$$

Así que, en cualquier caso, $\varphi_n(\omega) \leq \varphi_{n+1}(\omega)$.

Así que, φ_n es una sucesión no decreciente de variables aleatorias simples no negativas tales que $\text{lím}_{n\to\infty} \varphi_n(\omega) = X(\omega)$ para cualquier $\omega \in \Omega$.